مسأله‌های المپیادی

ارشک حمیدی

مسأله‌های این بخش برای کسانی جمع‌آوری شده‌اند که به گسترش توانایی‌شان در حل کردن مسأله‌های پیکارجو و نامتعارف علاقه‌مندند. می‌توانید راه‌حلهای خودتان را برای این مسأله‌ها حداکثر تا تاریخ اول اسفند ۱۳۸۳ به آدرس دفتر مجله بفرستید.

مسأله‌ها

۱۰۱. الف) n و d عددهای طبیعی‌اند و $2n^2$ بر d بخش‌پذیر است. ثابت کنید n^2+d مربع کامل نیست.

ب) p عددی اول و n عددی طبیعی است. ثابت کنید pn^2 حداکثر یک مقسوم‌علیه مانند d دارد که n^2+d مربع کامل است.

۱۰۲. a و b عددهایی صحیح‌اند و به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $2^n a+b$ مربع کامل است. ثابت کنید $a=0$.

۱۰۳. کوچکترین عدد طبیعی مانند n را پیدا کنید که در میان هر n عدد طبیعی بتوان ۱۸ عدد پیدا کرد که مجموعشان بر ۱۸ بخش‌پذیر باشد.

۱۰۴. همهٔ عددهای طبیعی مانند m و n را طوری پیدا کنید که m^2+1 بر n و n^3+1 بر m بخش‌پذیر باشد.

۱۰۵. دستگاه معادله‌های

$$\lfloor\sqrt{y-1}\rfloor^2 = x-1$$
$$2\lfloor\sqrt{y+2\sqrt{x}}\rfloor = y-1$$

را در مجموعهٔ عددهای حقیقی حل کنید.

۱۰۶. a_1، a_2، ... و a_n عددهایی مثبت‌اند $(n>3)$ و $a_1a_2\cdots a_n=1$. ثابت کنید

$$\frac{1}{1+a_1+a_1a_2}+\frac{1}{1+a_2+a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{1+a_n+a_na_1}>1$$

۱۰۷. a، b و c عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$3+a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{1+abc}$$

۱۰۸. a، b و c عددهایی طبیعی‌اند و $a < b$ ۲ و $b < c$ ۲. ثابت کنید عددی حقیقی مانند λ وجود دارد که

$$\frac{۱}{۳} < \{\lambda a\} \leq \frac{۲}{۳}, \quad \frac{۱}{۳} < \{\lambda b\} \leq \frac{۲}{۳}, \quad \frac{۱}{۳} < \{\lambda c\} \leq \frac{۲}{۳}$$

($\{t\}$ جزء کسری عدد حقیقی t است، یعنی $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$.)

۱۰۹. در هر یک از خانه‌های جدولی $m \times n$، که در آن $m \geq ۲$ و $n \geq ۲$، یکی از عددهای -۱ و ۱ را نوشته‌ایم، به طوری که از هر یک از این عددها دست‌کم دو بار استفاده کرده‌ایم. ثابت کنید می‌توان دو سطر و دو ستون از این جدول را طوری انتخاب کرد که مجموع چهار عدد نوشته شده در خانه‌های مشترکشان برابر با صفر باشد.

۱۱۰. هر یک از خانه‌های جدولی ۵۰×۵۰ را با یکی از چهار رنگی که در اختیار داریم رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید خانه‌ای وجود دارد که در بالا، پایین، سمت چپ و سمت راست آن، خانه‌هایی همرنگ با آن وجود دارند (لازم نیست این خانه‌ها مجاور خانهٔ موردنظر باشند).

۱۱۱. از میان هر سه عضو مجموعه‌ای متناهی از عددهای حقیقی می‌توان دو عدد انتخاب کرد که مجموعشان هم عضوی از این مجموعه باشد. تعداد عضوهای این مجموعه حداکثر چندتاست؟

۱۱۲. در مثلث ABC، $AC = BC$. فرض کنید P نقطه‌ای درون مثلث ABC باشد که $\angle PAB = \angle PBC$ و M وسط AB باشد. ثابت کنید $\angle APM + \angle BPC = ۱۸۰^\circ$.

۱۱۳. خطهای $l_۱$ و $l_۲$ مماسهای مشترک خارجی دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$اند. خط $l_۱$ بر دایره‌های $C_۱$ و $C_۲$ به‌ترتیب در نقطه‌های A و B مماس است و خط $l_۲$ بر دایره‌های $C_۱$ و $C_۲$ به‌ترتیب در نقطه‌های C و D مماس است. M وسط پاره‌خط AB است و P و Q به‌ترتیب نقطه‌های برخورد دوم MC و MD با $C_۱$ و $C_۲$اند. ثابت کنید نقطه‌های A، B، P و Q روی یک دایره قرار دارند.

۱۱۴. نقطهٔ O درون شش‌ضلعی $A_۱A_۲A_۳A_۴A_۵A_۶$ طوری قرارگرفته است که همهٔ ضلعهای این شش‌ضلعی از نقطهٔ O تحت زاویهٔ ۶۰° دیده می‌شوند و در ضمن

$$OA_۱ > OA_۳ > OA_۵, \quad OA_۲ > OA_۴ > OA_۶$$

ثابت کنید

$$A_۱A_۲ + A_۳A_۴ + A_۵A_۶ < A_۲A_۳ + A_۴A_۵ + A_۶A_۱$$

۱۱۵. نقطهٔ D درون مثلث ABC قرار دارد و عددهایی حقیقی مانند a، b، c و d وجود دارند که

$$AB = ab,\ AC = ac,\ AD = ad,\ BC = bc,\ BD = bd,\ CD = cd$$

ثابت کنید $\angle ABD + \angle ACD = ۶۰^\circ$.